Lezione 4

Sottospazi, formula di Grassman, somma diretta, esercizi

Teorema 4.1 (Formula di Grassman). *Siano W, U sottospazi vettoriali di V rispettivamente di dimensione s, t, n, allora*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) + dim(W \cap U) \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_l}\}$ base di $W \cap U$ con l dimensione di $W \cap U$, allora essendo nell'intersezione posso completarle sia ad una base di $U\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_l, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{t-l}\}$ che ad una base di $W\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{s-l}\}$. Banalmente la base $B = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_l, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{t-l}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{s-l}\}$ genera il sottospazio somma, sommandone gli indici trovo che è formata da $t + s - l$ elementi, quindi la tesi seguirà se dimostro la loro indipendenza lineare. Siano a_i, b_j, c_k coefficienti rispettivamente dei $\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_k$ della combinazione lineare dei vettori di B con il vettore nullo, si avrà

$$b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_{s-l}\mathbf{w}_{s-l} = -(a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_l\mathbf{x}_l + c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_{t-l}\mathbf{u}_{t-l}) \tag{4.2}$$

dove il primo membro della (4.2) apparterrà a W quindi necessariamente il secondo deve appartenere a $U \cap W$, quindi guardando solo il secondo membro sarà possibile esprimerlo come combinazione lineare dei soli $\mathbf{x}_j$ con certi coefficienti e_j, si avrà

$$a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_l\mathbf{x}_l + c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_{t-l}\mathbf{u}_{t-l} = e_1\mathbf{x}_1 + ... + e_l\mathbf{x}_l \tag{4.3}$$

o riordinando

$$(a_1 - e_1)\mathbf{x}_1 + ... + (a_l - e_l)\mathbf{x}_l + c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_{t-l}\mathbf{u}_{t-l} = 0 \tag{4.4}$$

e si vede subito che nella (4.4) ho combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti col vettore nullo, quindi tutti i coefficienti, in particolare i c_k, saranno nulli. Allora con l'informazione che i c_k sono nulli ritorniamo nella (4.2) e riordinando otteniamo

$$a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_l\mathbf{x}_l + b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_{s-l}\mathbf{w}_{s-l} = 0 \tag{4.5}$$

ancora una volta abbiamo una combinazione lineare con vettore nullo di vettori che sappiamo linearmente indipendenti per ipotesi in quanto formano una base per W. Ho dimostrato che tutti i coefficienti sono nulli e quindi l'indipendenza lineare dei vettori di B; essi dunque formano una base di $U + W$. □

Definizione 4.2. *Si dice che $U + W$ con U, W sottospazi vettoriali di V sono in somma diretta se $dim(U \cap W) = 0$.*

4.1 Esercizi

Esercizio 4.3. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ h \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Siano $V = Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $U = Span(\mathbf{u})$.

1. Calcolare al variare di h la dimensione di V;
2. Stabilire per quali h $\mathbf{u} \in V$;
3. Dire per quali h U e V sono in somma diretta.

Esercizio 4.4. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \right\} \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - t = z = 0 \right\}$$

determinare:

(1) la dimensione ed una base di U e V.

(2) la dimensione ed una base di $U + V$ e $U \cap V$

(3) U e V sono in somma diretta?

Esercizio 4.5. sia $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \right\}$

(1) Determinare la dimensione di U e trovarne una base ortogonale.

(2) Determinare la base di $U^\perp$

(3) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sui sottospazi U e $U^\perp$.

Esercizio 4.6. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y = t = 0 \right\} \quad V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) Determinare una base per U.

(2) Determinare un sistema di generatori per $U + V$.

(3) calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$

Esercizio 4.7. Fissati in $\mathbb{R}^4$ i vettori:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \text{e } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

, si consideririno i sottospazi

$$U = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = y + z = 0 \right\}$$

Esercizio 4.8. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 & k-1 \\ -(k-1) & 1 & k & k \\ 2(k-1) & k+2 & k+7 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare il rango di A al variare di k.

(2) Determinare per quali k il sistema ammette soluzioni.

(3) Determinare per quali k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

(4) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica.