4 Dinamica dei sistemi di punti e dei corpi estesi II

Esercizio 6.20 Perché sia verificata la condizione di puro rotolamento deve essere verificato che il momento della forza applicata deve essere minore del valore di soglia cioè

$$f \leq \mu_s |N| \tag{4.1}$$

che è il massimo momento che può essere offerto dalla forza d'attrito in modo che il punto di contatto sia istantaneamente fermo, per valori maggiori si avrebbe attrito dinamico, cioè il corpo comincerebbe a slittare. La legge del moto per il CM è

$$mg \sin(\theta) - f = ma_{CM} \tag{4.2}$$

che va messa insieme alla condizione di puro rotolamento che, scelto il CM come polo[1], si scrive

$$fr = I\alpha = (mr^2)\frac{a_{CM}}{r} \tag{4.3}$$

che messe insieme forniscono la forza d'attrito necessaria al puro rotolamento $f = \frac{1}{2} mg \sin(\theta)$ che deve soddisfare la condizione 4.1, che porta a

$$\tan(\theta) \leq 2\mu_s \Rightarrow \theta \leq 23.7 \deg \tag{4.4}$$

Si noti come per il puro rotolamento la forza d'attrito quindi l'angolo di slittamento sia proporzionale al momento di inerzia del corpo, quindi a parità di massa e μ_s un corpo con inerzia maggiore slitterà ad un angolo maggiore (ma rotolerà più lentamente). Questo è un modo per leggere in maniera fisica le equazioni di un problema.
Alla seconda parte dell'esercizio si risponde facilmente con considerazioni

[1] Vedi Mazzoldi par 4.4. L'equazione cardinale vale qualunque sia la scelta del polo purché a) Il polo è fisso nel SR inerziale scelto b) Il CM è fisso nel SR inerziale scelto c) Il polo coincide col CM (anche se questo si muove di moto vario) d) $\mathbf{v}_O \parallel \mathbf{v}_{CM}$

energetiche. Partendo da fermo sarà

$$E_f^{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mv^2 = \Delta U = mg\Delta h = mg(0.98m - 0.12m) \quad (4.5)$$

che da $v_f = 2.9$ m/s e $\omega_f = 24.2$ rad/s

esercizio VII.15 (Mencuccini-Silvestrini) *Un cilindro omogeneo di massa m_1 e raggio R è disposto in modo da rutare intorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo CM e parallelo alle sue generatrici (figura 4.1). Tale rotazione avviene con attrito costante nel tempo (cioè l'attrito fornisce un momento torcente costante M_A ndr). Sul cilindro è avvolto un filo inestensibile, di massa trascurabile, che on slitta sulla siperficie del cilindro e alla cui estremità inferiore è attaccato il corpo di massa m_2. Partendo tutto da fermo, si osserva che quando il corpo è sceso di una quantità h, il cilindro si trova a ruotare con velocità angolare ω_0. In questo momento viene tagliato il filo, dopo quanto si ferma il cilindro?*

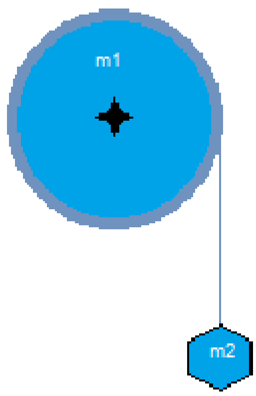

Figura 4.1

- Nella prima fase le forze i cui momenti pongono in rotazione m_1 sono la tensione dovuta alla forza peso di m_2 e il momento d'attrito M_A incognito. Conoscendo la velocità di rotazione itnermedia ω_0 possiamo subito risolvere la seconda parte del problema pensando di conoscere M_A, dato che

$$M_A \Delta t = \Delta L = I_{cil}\omega_0 \Rightarrow \Delta t = \frac{m_1 R^2}{2M_A}\omega_0 \tag{4.6}$$

- L'incognita del problema è M_A è va trovata sfruttando le relazioni che governano la fisica della prima parte del problema.
  scriviamo la conservazione dell'energia includendo il termine dissipativo $M_A \Delta\theta$ e l'equazione cardinale della dinamica, che per M costante diventa $M\Delta = \Delta L$

$$\begin{cases} \Delta E_{mecc} = L_{n.c.} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2(\omega_0 R)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1R^2}{2}\right)\omega_0^2 - m_2gh = -M\Delta\theta \\ m_2gR\Delta t - M\Delta t = \frac{m_1R^2}{2}\omega_0^2 \end{cases} \tag{4.7}$$

da cui scrivendo $\Delta\theta = h/R$ si ottiene

$$M_A = m_2gR - \frac{\omega_0^2 R^3}{4h}(m_1 + 2m_2). \tag{4.8}$$

Esercizio VII.28 Mencuccini-Silvestrini *U*na sfera omogenea di raggio R rotola senza strisciare con velocità v su un piano orizzontale; la direzione di v è perpendicolare alla faccia verticale OO' di un blocco fisso (gradino) di altezza h (h<a). L'urto tra sfera e blocco è tale che il punto di contatto non slitta e non si stacca mentre la sfera si solleva dal suolo (è anelastico). Qual è la minima velocità v_{min} che consente alla sfera di salire sopra il blocco?

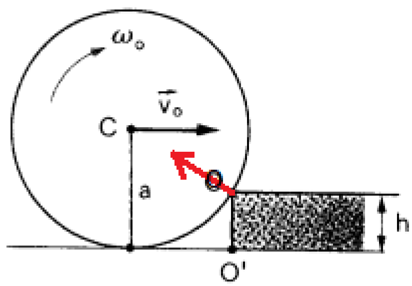

Figura 4.2

- In questo problema bisogna fare ben attenzione alle leggi da utilizzare e a quando utilizzarle. Il momento cruciale è quello dell'urto. La **scelta**

del polo in questo problema è anche fondamentale infatti una scelta furba del polo è il punto O, infatti per qualsiasi altro polo bisognerebbe valutare il contributo della reazione vincolare (in rosso in figura) incognita ma tale forza ha momento nullo rispetto al fulcro O dunque il momento angolare rispetto a questo punto si conserva durante l'urto. Dopo l'urto invece agirà rispetto al polo soltanto il momento della forza di gravità e poichè in questa fase agiscono solo forze conservative applicheremo il teorema di conservazione dell'energia

- Prima dell'urto il momento angolare rispetto ad O, usando il teorema di Konig si scrive

$$L = Mv(R-h) + Mv(\frac{2}{5}R) = mv(\frac{7}{5} - h) \tag{4.9}$$

dove v è la velocità del CM prima dell'urto. Dopo l'urto la velocita del CM varierà ma non varierà il momento angolare per quanto detto nel punto precedente per cui abbiamo che mentre la sfera ruota attorno a O L si scrive:

$$L' = Mv'R + Mv'\frac{2}{5}R = Mv'\frac{7}{5}R \tag{4.10}$$

dove v' è la nuova velocità. Ma abbiamo detto che per la scelta del polo vale

$$L = L' \tag{4.11}$$

da cui, insieme alla precedente si ottiene

$$v' = v\left(1 - \frac{5h}{7R}\right). \tag{4.12}$$

- A questo punto applichiamo la conservazione dell'energia. Il minimo della velocità si ottiene quando la sfera sale il gradino arrivando sulla sommità ferma. L'energia potenziale mgh sarà dunque uguale all'energia cinetica appena dopo l'urto che sempre sfruttando Konig si scrive

$$mgh = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}M)v'^2 = \frac{7}{10}Mv'^2 \tag{4.13}$$

Sostituendo l'espressione per v' infine si ottiene

$$v = v_{min} = \frac{R}{7R-5h}\sqrt{70gh}. \tag{4.14}$$