4 | Dinamica dei sistemi di punti e dei corpi estesi II

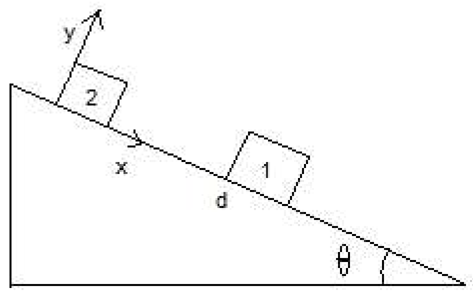

Figura 4.1

Esercizio 4.3

1. Utilizzando il sistema di riferimento in figura 4.1 si scrivono immediatamente le forze che agiscono sui due corpi

$$\begin{cases} mg(\sin(\theta) - \mu_1 \cos(\theta)) = ma_1 \\ mg(\sin(\theta) - \mu_2 \cos(\theta)) = ma_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

ottenendo le accelerazioni dalle equazioni precedenti sappiamo scrivere le leggi orarie sapendo che $v_1(0) = v_2(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(0) = d$; dunque

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 \\ x_2(t) = d + \frac{1}{2} a_2 t^2 \end{cases} \tag{4.2}$$

Ponendo $x_1(t^*) = x_2(t^*)$ si ottiene $t^* = \sqrt{\frac{2d}{a_2 - a_1}} \simeq 1.09$ e dato che $a_2 > a_1$ si ottiene un risultato fisicamente accettabile.

2. la quantità di moto del sistema al momento dell'urto è pari alla quantità di moto dei due corpi, per la conservazione della quantità di moto possiamo scrivere

$$p_1 + p_2 = ma_1 t^* + ma_2 t^* = 2mv \tag{4.3}$$

da cui $v = 2.57ms^{-1}$.

3. Per calcolare l'accelerazione si sommano le forze che agiscono sulle singole masse, questo perché la forza agente su un sistema è la risultante delle forze agenti sulle sue parti. Per cui

$$mg(\sin(\theta) - \mu_1 \cos(\theta)) + mg(\sin(\theta) - \mu_2 \cos(\theta)) = 2ma \tag{4.4}$$

che fornisce $a = 2.35ms^{-2}$

4. Per rispondere alla domanda precedente abbiamo scritto la seconda legge per il sistema composto dai due cubetti. Una volta calcolata l'accelerazione del sistema (quindi l'accelerazione di ogni sua parte essendo un corpo rigido) scriviamo la seconda legge per il corpo a valle. A differenza della 4.1 dovremmo adesso includere la forza di reazione F

$$mg(\sin(\theta) - \mu_1 \cos(\theta)) + F = ma \tag{4.5}$$

da cui $F = 1.7N$

Esercizio 6.20 Perché sia verificata la condizione di puro rotolamento deve essere verificato che il momento della forza applicata deve essere minore del valore di soglia cioè

$$f \leq \mu_s |N| \tag{4.6}$$

che è il massimo momento che può essere offerto dalla forza d'attrito in modo che il punto di contatto sia istantaneamente fermo, per valori maggiori si avrebbe attrito dinamico, cioè il corpo comincerebbe a slittare. La legge del moto per il CM è

$$mg\sin(\theta) - f = ma_{CM} \tag{4.7}$$

che va messa insieme alla condizione di puro rotolamento che, scelto il CM come polo[1], si scrive

$$fr = I\alpha = (mr^2)\frac{a_{CM}}{r} \tag{4.8}$$

[1] Vedi Mazzoldi par 4.4. L'equazione cardinale vale qualunque sia la scelta del polo purché a) Il polo è fisso nel SR inerziale scelto b) Il CM è fisso nel SR inerziale scelto c) Il polo coincide col CM (anche se questo si muove di moto vario) d) $\mathbf{v}_O \parallel \mathbf{v}_{CM}$

che messe insieme forniscono la forza d'attrito necessaria al puro rotolamento $f = \frac{1}{2} mg \sin(\theta)$ che deve soddisfare la condizione 4.6, che porta a

$$\tan(\theta) \leq 2\mu_s \Rightarrow \theta \leq 23.7 \, \mathrm{deg} \tag{4.9}$$

Si noti come per il puro rotolamento la forza d'attrito quindi l'angolo di slittamento sia proporzionale al momento di inerzia del corpo, quindi a parità di massa e μ_s un corpo con inerzia maggiore slitterà ad un angolo maggiore (ma rotolerà più lentamente). Questo è un modo per leggere in maniera fisica le equazioni di un problema.
Alla seconda parte dell'esercizio si risponde facilmente con considerazioni energetiche. Partendo da fermo sarà

$$E_f^{kin} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = mv^2 = \Delta U = mg\Delta h = mg(0.98m - 0.12m) \tag{4.10}$$

che da $v_f = 2.9$ m/s e $\omega_f = 24.2$ rad/s