Lezione 3

Determinanti, rango, teorema di Rouchè-Capelli, esercizi

Definizione 3.1. *Data una matrice $A \in M(n,m)$ (cioè matrice con n righe e m colonne), chiamo rango o rank(A) il numero massimo di colonne linearmente indipendenti (o equivalentemente la dimensione dello spazio generato dalle colonne).*

Si dimostra che il rango di una matrice A è invariante per trasposizione, cioè $\text{rank}(A^t) = \text{rank}(A)$ quindi il rango è anche il numero di righe linearmente indipendenti. Se ne conclude che sarà sempre $\text{rank}(A \in M(n,m)) \leq min\{n,m\}$. Per calcolare il rango di una matrice bisogna "contare" quante colonne o righe linearmente indipendenti ci sono nella matrice stessa, e nel fare ciò si può sfruttare la proprietà notevole del determinante delle matrici quadrate.

Definizione 3.2. *Data una matrice quadrata A di ordine n, si definisce* $\det(A) : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *l'applicazione (che si dimostra essere unica) che gode delle (sole!) seguenti proprietà definenti:*

- $\det(\mathbb{I}) = 1$.
- $\det(A)$ *è lineare nelle colonne di A.*
- $\det(A) = 0$ *se A ha una colonna di zeri.*

Esercizio 3.3. Dimostrare applicando le proprietà della def. 3.2 che se le colonne di una matrice non sono linearmente indipendenti, cioè se la matrice non ha rango massimo allora $\det(A) = 0$.

Il concetto di rango è utile per la discussione di sistemi lineari. Si ha il seguente importante teorema

Teorema 3.4 (Rouchè-Capelli)**.** *Dato un sistema lineare, sia A la matrice dei coefficienti e Ab la matrice dei coefficienti orlata con i termini noti. Il sistema è risolubile* $\Longleftrightarrow$ *rank(A) =rank(Ab).*

Dimostrazione. Un sistema lineare può essere visto come

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Rango della matrice Ab maggiore di quello si A significa che non è possibile esprimere il vettore colonna $\mathbf{b}$ come combinazione lineare degli altri vettori colonna $\mathbf{a}_j$ ovvero non esiste nessuna m-upla $\{x_1, ..., x_m\}$ che possa risolvere il sistema. □

Calcolo del rango Un metodo efficiente per il calcolo del rango di una matrice è l'applicazione del metodo di eliminazione di Gauss per questo vedere la lezione 7 dedicata

Calcolo del determinante Un metodo pratico per calcolare il determinante è dato dalla seguente formula, che non si capisce finchè non si usa

Risultato 3.5 (Algoritmo di Laplace)**.**

$$\det(A) = a \textit{ se } A \textit{ è una matrice } 1 \times 1 \textit{ di componente } a$$

$$det(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} det(A_{ik}) \tag{3.2}$$

dove nella (3.2) *si intende il determinante sviluppato presso la riga i-esima per una matrice con n colonne (naturalmente lo si può sviluppare anche per colonna con formula analoga) e* A_{ik} *indica la matrice ottenuta da quella di partenza togliendo la i-esima riga e la k-esima colonna (minore).*

si nota come l'apparente semplice definizione 3.2 del determinante nasconde molte insidie per la computazione, $n!$ per la precisione, che è il tasso di crescita della difficoltà computazionale.[1] Nel caso di una matrice triangolare (superiore o inferiore) applicando l'algoritmo di laplace sviluppando via via per la riga/colonna con più zeri si ottiene il seguente risultato notevole

Risultato 3.6. *NB: Il determinante di una matrice triangolare*[2] *è il prodotto delle componenti sulla diagonale.*

In modo piuttosto laborioso si dimostra il seguente

Teorema 3.7 (Binet)**.** *Siano* $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *allora* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

[1] esistono metodi che scalano come n^α utilizzati però in ambito computazionale.
[2] una matrice diagonale è un caso particolare di matrice trangolare superiore e inferiore

con il notevole corollario

Corollario 3.8. *Sia* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *invertibile allora* $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$. *In particolare risulta l'equivalenza*

$$A \text{ è invertibile} \iff \det(A) \neq 0 \tag{3.3}$$

3.1 Esercizi

Esercizio 3.9. Si discuta e risolva il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 7z = 2 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Esercizio 3.10. Si determini il rango della seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione: si tratterà di calcolare determinanti delle sottomatrici quadrate, si ricorda che basta una sottomatrice quadrata n con determinante non nullo per poter concludere che il rango della matrice di partenza è maggiore o uguale a n ma per dire che è minore di n bisogna mostrare (a meno di metodi più furbi per casi così semplici) che tutte le sottomatrici quadrate di ordine n hanno determinante nullo. Altri esercizi simili sono stati improvvisati e si è rispiegato meglio il concetto di dipendenza e indipendenza lineare e associati.

Esercizio 3.11. Sia $A_n \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$ la matrice le cui componenti sono

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \\ i+2 & \text{se } i = j \end{cases}$$

discutere l'andamento della successione $c_n = \frac{\det(A_n)}{n!}$, dove $n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Suggerimento: Per calcolare il determinante applicate in maniera intelligente l'algoritmo di eliminazione gaussiana.