3 | Dinamica dei sistemi di punti e dei corpi estesi I

Calcolo del centro di massa di un sistema di punti Immaginiamo un sistema di punti materiali di masse m_i localizzate in $\mathbf{r}_i$ nel piano xy che indichiamo con $(\mathbf{r}_i; m_i)$ ad esempio

- (1,0;5)
- (0,1;3)
- (-1,0;1)
- (0,-1;2)

sarà per definizione

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i m_i}{\sum_i m_i} = \frac{5(1,0) + 3(0,1) + 1(-1,0) + 2(0,-1)}{2+3+5+1} \simeq (0.36, 0.1) \tag{3.1}$$

Il centro di massa è quindi la media pesata con la massa delle coordinate dei singoli punti materiali, esso da un'idea della localizzazione media della massa del sistema, infatti si vede in questo caso come esso risulti più vicino al punto più pesante. Il centro di massa è legato al sistema in esame e la sua posizione non cambia rispetto ad esso anche cambiando sistema di coordinate, quindi è un punto di riferimento importante a cui ricondurremo quantità dinamiche fondamentali che vedremo, come momenti di inerzia per assi passanti per il CM e i momenti di forze esterne agenti sul sistema scelto il CM come polo. Nel caso continuo con una distribuzione di massa descritta da una desità $\rho(r)$ le precedenti definizioni si generalizzano con le sostituzioni formali

$$\sum \to \int dV \qquad m_i \to \rho(r) \tag{3.2}$$

Il centro di massa ha anche un profondo significato dinamico. Derivando la definizione di centro di massa rispetto al tempo si trova infatti

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i \frac{d}{dt}\mathbf{r}_i m_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \mathbf{v}_i m_i}{\sum_i m_i} \tag{3.3}$$

Dove, se si scrive $\sum_i m_i = M$ massa totale del sistema, si ottiene

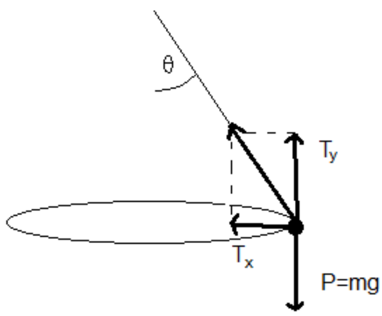
$$P = M\mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i\mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i \tag{3.4}$$

Cioè la quantità di moto di un punto materiale fittizio di massa uguale alla massa del sistema e velocità pari alla $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$ è uguale alla quantità di moto del sistema. Ma non solo, derivando ulteriormente si ottiene

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \tag{3.5}$$

dove la somma totale delle forze interne è nulla perché queste si annullano a due a due in virtù del principio di azione e reazione. Questa equazione ci dice che il moto del centro di massa è *unicamente determinato* dalle forze esterne agenti sul sistema, per un sistema isolato il CM è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.

Esercizio 2.38 - Pendolo conico *Consideriamo un pendolo conico di massa $m = 2kg$ e lunghezza $l = 0.5m$ che ruota con una pulsazione $\omega_1 = 5rad/s$, questo viene portato a una pulsazione $\omega_2 =rad/s$ di quanto varia l'energia totale del sistema?*



Le forze che agiscono sono la forza peso **P**=m**g** e la tensione **T**. Chiamato θ l'angolo del pendolo con la verticale imponiamo

$$\begin{cases} T_y = T\cos(\theta) = mg \\ T_x = T\sin(\theta) = ma_c = m\omega_1^2(l\sin(\theta)) \end{cases} . \tag{3.6}$$

da cui si ha $\cos(\theta_1) = \frac{g}{\omega_1^2 l}$. Abbiamo ottenuto la configurazione iniziale del pendolo, nota la pulsazione possiamo calcolare l'energia meccanica iniziale riferendo ad esempio l'energia potenziale al perno del pendolo. Notiamo però che le formule scritte per $\omega = \omega_1$ in forma sono le stesse che scriveremmo per $\omega = \omega_2$ dunque possiamo concludere che vale

$$\cos(\theta_{1,2}) = \frac{g}{\omega_{1,2}^2 l} \tag{3.7}$$

E per l'energia meccanica

$$E_f - E_i = \frac{1}{2}ml^2(\omega_2^2\sin^2(\theta_2) - \omega_1^2\sin^2(\theta_1)) - mgl(cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \tag{3.8}$$

Che fornisce $\Delta E = 16.8J$.

Esercizio 6.21 Scriviamo il sistema di equazioni per le forze agenti sul sistema. Si assume che a sia maggiore di zero quando il disco sale e la massa scende. Per le componenti parallele alla direzione del moto possiamo scrivere

$$\begin{cases} -Mg\sin(\theta) + T - f = Ma \\ -T + mg = ma \end{cases} \tag{3.9}$$

Dove T è la tensione della corda e f è la forza d'attrito. Imponendo il vincolo di puro rotolamento sappiamo che f ha la forma

$$f = \frac{F}{1 + \frac{MR^2}{I}} = \frac{2}{3}F \tag{3.10}$$

Dove $F = -Mg\sin(\theta) + T$ è la forza di trazione a cui è soggetto il corpo e l'ultima uguaglianza è valida nel caso di un disco. Risolvendo quindi il precedente sistema di equazioni si arriva alla condizione

$$\frac{2}{3}(-Mg\sin(\theta) + mg) = (M + \frac{2}{3}m)a \tag{3.11}$$

Sostituendo i valori si verifica che $a > 0$, cioè che la massa scende e il disco sale (come indicato dal problema) e si ottiene

$$a = \frac{-M\sin(\theta) + m}{\frac{3}{2}M + m}g \simeq 1.1ms^{-2} \tag{3.12}$$

Per calcolare la velocità finale potremmo ricavare la legge del moto integrando le precedenti equazioni, ricaveremmo $h(t)$ da cui calcolare l'istante t^* in cui la massa tocca il suolo e poi dovremmo calcolare $v(t^*)$. Possiamo invece sfruttare il fatto che sul sistema agiscono forze conservative (la forza d'attrito statico non compie lavoro) quindi per la conservazione dell'energia uguagliare l'energia cinetica finale alla variazione di energia potenziale:

$$mgh - Mgh\sin(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{v}{R})^2 \tag{3.13}$$

che fornisce

$$v = \sqrt{\frac{4gh(m - M\sin(\theta))}{2m + 3M}} \simeq 1.81ms^{-1} \tag{3.14}$$

Equivalentemente si può calcolare l'energia cinetica finale sapendo che il lavoro delle forze agenti su m vale $Fh = mah = \frac{1}{2}mv^2$ da cui $v = \sqrt{2ah}$ e si ottiene ovviamente lo stesso risultato. L'energia cinetica del disco quando la massa m tocca il suolo vale

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2 \tag{3.15}$$

Il disco continuerà a salire per un'altezza Δz_2 rispettando la conservazione dell'energia $E_k = mg\Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{3v^2}{4g} = \frac{3ah}{2g} = 0.25m$ da cui $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = h\sin(\theta) + 0.25m = 1m$