Lezione 2

Geometria analitica: equazioni parametriche, cartesiane, esercizi

Definizione 2.1. *Sia S un insieme geometrico "lineare"* [1] *definito tramite uno spazio vettoriale $W \subseteq V$ con $dim(V) = n$. Scelta una base di W $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s\}$, con $s = dim(S)$ e un punto Q per cui si vuole "passi" S, si può esprimere ogni punto P di coordinate $(x_1, ..., x_n)$ tramite:*

$$\overrightarrow{\mathbf{QP}} = t_1\mathbf{w}_1 + ... + t_s\mathbf{w}_s \tag{2.1}$$

per opportuni parametri $t_1, ..., t_s \in \mathbb{R}$. Esplicitando le coordinate si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + t_1 w_{11} + ... + t_s w_{1s} \\ x_2 &= q_2 + t_1 w_{21} + ... + t_s w_{2s} \\ &\vdots \\ x_n &= q_n + t_1 w_{n1} + ... + t_s w_{ns} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le (2.2) sono dette equazioni parametriche di S.

In pratica la formula da usare che mi individua l'insieme geometrico che voglio trattare una volta individuato il punto Q per cui passa e i vettori che lo generano è la (2.1), poi le (2.2) si otterranno semplicemente esplicitando la formula vettoriale in componenti. Si noti che si hanno s vettori linearmente indipendenti e s parametri che formeranno uno spazio di dimensione s, mentre n è la dimensione dello spazio vettoriale in cui è "immerso" l'insieme geometrico.

Esempio 2.2. Pensiamo al caso concreto del piano in uno spazio vettoriale di dimensione 3, allora detti $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ i vettori che lo generano e detto $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ le equazioni parametriche del piano si scrivono:

$$\begin{aligned} x &= q_1 + tw_1 + sv_1 \\ y &= q_2 + tw_2 + sv_2 \\ z &= q_3 + tw_3 + sv_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

o, in maniera compatta

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{w} + s\mathbf{v}. \tag{2.4}$$

[1](retta, piano..., tecnicamente dovremmo parlare di spazi affini ma qui non voglio complicare troppo la trattazione, vedere `https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_affine`

Notare. 3 coordinate come la dimensione dello spazio in cui è immerso e 2 parametri come la dimensione del piano

Le coordinate cartesiane invece si otengono mettendo a sistema le parametriche ed eliminando i parametri, si otterrà per il piano un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{2.5}$$

Torneremo su questa equazione dopo aver illustrato il concetto di prodotto scalare.

Definizione 2.3. *Sia V uno spazio vettoriale, un prodotto scalare su V è un'applicazione bilineare (,): $V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:*

$$(v, w) = (w, v)\ \forall v, w \in V \ \textit{(simmetria)} \tag{2.6}$$

$$(v, v) \geq 0\ \forall v \in V \ \textit{e}\ (v, v) = 0 \iff v = 0 \ \textit{(definito positivo)} \tag{2.7}$$

Due vettori v, w si dicono ortogonali se $(v, w) = 0$.

In particolare noi tratteremo il solito prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.4. *Si dice prodotto scalare euclideo quello definito dalla relazione*

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} := u_1 v_1 + ... + u_n v_n \tag{2.8}$$

Esercizio 2.5. (preso da prove in itinere) dati i vettori $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}}$ determinare:

1. un versore $\hat{\mathbf{w}} \in Span(\mathbf{u} - \mathbf{v})$;
2. l'equazione cartesiana di $Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;
3. un vettore $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
4. un vettore $\mathbf{x} \in Span(u, v)$ con $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$.

Definizione 2.6. *Dato uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare (forma bilineare, simmetrica, definita positiva) di dice distanza fra due punti individuati dai vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ il numero $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}$.*

E' immediato verificare come nel caso del prodotto scalare standard d è la distanza euclidea data dal teorema di Pitagora.

Definizione 2.7. *Data una retta in $\mathbb{R}^2$ descritta dall'equazione $r : ax + by + c = 0$ e un punto $P = (x_0, y_0)$ la distanza del punto dalla retta è data da*

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Definizione 2.8. *Data un piano in $\mathbb{R}^3$ descritto dall'equazione $\Pi : ax+by+cz+d = 0$ e un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ la distanza del punto dal piano è data da*

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Come si può intuire le due formule precedenti possono essere generalizzabili alla distanza punto-iperpiano n dim. in $\mathbb{R}^n$. Quando però dobbiamo ad esempio calcolare la distanza punto retta in $\mathbb{R}^3$ per questa *non esiste* una formula chiusa: dovremo pertanto calcolare il piede della perpendicolare e quindi determinare "a mano" la distanza.

Esercizio 2.9. Verificare che la condizione di ortogonalità per il prodotto scalare euclideo è di fatti quella usuale nel caso di due vettori aventi la direzione di due rette ortogonali nel piano per cui sappiamo sussistere la relazione $m' = -\frac{1}{m}$ fra i coefficienti angolari.

Il prodotto scalare euclideo si presta a un'interpretazione geometrica immediata. Vale infatti

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}|| \cos(\theta) \tag{2.9}$$

dove $||\mathbf{v}|| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ è detta *norma euclidea* di $\mathbf{v}$ e θ è l'angolo fra i due vettori. Per cui il prodotto scalare euclideo è il prodotto della norma di uno dei due vettori per la norma della proiezione dell'altro sul primo e viceversa figura , per la proprietà di simmetria del prodotto scalare (vedi fig. 2.1).

Esercizio 2.10. Ricavare le formule delle definizioni 2.7, 2.8 ragionano per proiezioni ed usando la 2.9 .

Torniamo adesso alla formula 2.5 e interpretiamola come

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0 \tag{2.10}$$

dove $d = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}$. quindi un piano è l'insieme di tutti i punti individuati da un vettore $\mathbf{x}$ ortogonale a un vettore $\mathbf{n} = (a, b, c)$ detto *normale* del piano più un eventuale termine di traslazione rispetto all'origine che dipende dal punto da cui fisso il passaggio del piano.

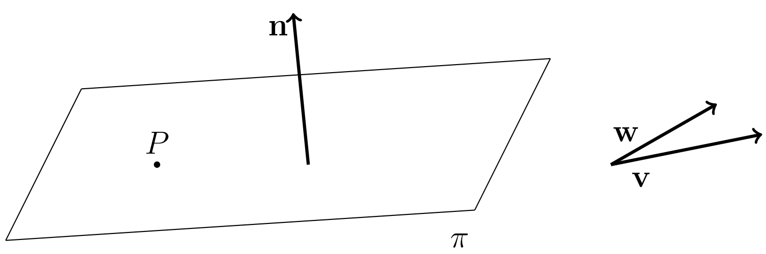

Figura 2.1: *un piano π, il punto P per cui "passa", i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ che lo generano e il vettore $\mathbf{n}$ ortogonale al piano.*

2.1 Esercizi

Esercizio 2.11. Fissata la base standard $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ di $\mathbb{E}^3_O$, sono dati i vettori: $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}}$ Determinare:

(1) Un versore $\hat{\mathbf{w}} \in$span$(\mathbf{u} - \mathbf{v})$;

(2) L'equazione cartesiana di span$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;

(3) Un vettore $\mathbf{n}$ ortogonale ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;

(4) Un vettore $\mathbf{x} \in$Span$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ortogonale al vettore $\mathbf{v}$;

(5) Le coordinate del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{u}\}$.

Esercizio 2.12. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, si considerino i punti $P_1 = (0, 1, -1)$, $P_2 = (1, 0, -1)$, e $P_3 = (0, 2, 0)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti P_1, P_2 e P_3:

(2) Dire quale/i fra i punti $Q_1 = (1, -1, 0)$, $Q_2 = (-1, 1, 0)$, $Q_3 = (1, 1, 0)$ e $Q_4 = (0, 0, -2)$ appartengono al piano π.

Suggerimento: vi possono essere più modi equivalenti di procedere, elenchiamone tre.

- Una volta verificato che i tre punti non sono allineati (posso verificare che i vettori OP_i siano lin. indip. o che prese due coppie qualsiasi sia ad esempio verificata $P_1 - P_2 \neq c \cdot P_2 - P_3$) posso ad esempio risolvere per i coefficienti a, b, c e d l'equazione del piano sostituendo i valori di (x, y, z) dei punti dati. Si otterrà d=0 se il piano passa per l'origine altrimenti fissato (arbitrariamente) $d \neq 0$ si otterranno gli altri parametri in funzione di esso.
- La seconda strada è scrivere l'equazione parametrica del piano passante per ad esempio P_1 e avente giacitura $\{P_1 - P_2, P_2 - P_3\}$ e passare quindi alla forma cartesiana.
- Terza alternativa sarebbe quella di individuare il vettore normale alla giagitura del piano e scrivere l'equazione cartesiana come $n \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + d = 0$ dove d si ricava dalla condizione che il piano passi per uno dei punti dati.

Esercizio 2.13. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$,, si considerino il punto $A = (1, 1, 1)$ ed il piano π di equazione $x + 2y + z = 1$.

(1) Scrivere le eq. cartesiane della retta r ortogonale a π e passante per A;

(2) Scrivere l'eq. del piano π contenente l'origine e la retta r;

(3) Scrivere l'eq. del piano σ passante per A e parallelo a π.

Esercizio 2.14. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B

(2) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P e avente direzione $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}$

(3) Precisare la posizione reciproca delle rette

(4) Scrivere l'equazione del piano π che contiene A, B, e P

(5) Calcolare la distanza dall'origine O del riferimento da π

Esercizio 2.15. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$.

(1) Si determini un'equazione cartesiana del piano π ortogonale a $\mathbf{v}$ che passa per A.

(2) Rappresentare in forma cartesiana la retta r parallela a $\mathbf{v}$ e passante per B.

(3) Si determini l'intersezione di π e di r.

(4) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sula retta r.