2 | Dinamica del punto

Veniamo adesso alla dinamica. Tutto è riassunto nel secondo principio:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2.1}$$

. Per prima cosa bisogna realizzare che il primo principio non è un caso particolare del secondo con $\mathbf{F} = 0$ ma primo e secondo insieme dicono che una variazione dello stato di quiete di un corpo avviene *se e solo se* su di esso agiscono delle forze, e queste ne causano un'accelerazione in ragione della legge enunciata nel secondo principio.

Il secondo errore che spesso si compie è quello di guardare al secondo principio come a una tautologia. Il secondo principio invece correla la dinamica (membro di sinistra, in questo caso) che comprende tutte le forze agenti sul corpo, con la cinematica, ovvero la sua accelerazione (a destra) attraverso la massa.

2.1 Lavoro ed Energia

Il lavoro compiuto da una forza $\mathbf{F}$ su un corpo che compie uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$ è il *prodotto scalare* $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, questa definizione si generalizza al caso di spostamenti finiti

$$L(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.2}$$

Il fatto che nella formula compaia il prodotto scalare è dovuto al fatto che solo la componente della forza *parallela* allo spostamento infinitesimo, quindi alla velocità istantanea ($d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$) cambia l'energia (cinetica) del corpo in movimento modificandone la velocità, laddove invece una forza perpendicolare alla velocità istantanea ne fa curvare la traiettoria senza modificarne la velocità in modulo[1]. Accade che quando la forza può essere scritta come derivata (o

[1] In inglese per differenziare si userebbero i due termini *velocity* per indicare la velocita vettoriale e *speed* per la velocità scalare, in modulo.

gradiente in 3D) di una funzione scalare V detta *energia potenziale* segue che

$$L(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_A}^{x_B} -\frac{dV}{dx} \cdot d\mathbf{s} = -(V(x_B) - V(x_A)), \tag{2.3}$$

a prescindere dal percorso che porta da A a B! Anche se mascherato dai processi dissipativi illustrati meglio nella prossima sezione, questo accade molto spesso in natura. Si ha infatti che le forze fondamentali ma anche le interazioni elementari fra i costituenti delle molecole ad esempio possono essere ben modellizzate da opportuni potenziali che ben descrivono le dinamiche fondamentali, a volte empirici a volte derivati da principi primi.

Adesso vogliamo trovare l'espressione dell'energia legata a un corpo in movimento, chiameremo questa quantità *energia cinetica*. Dato un corpo di massa m che si muove di moto uniforme a velocità v calcoliamo il lavoro che deve effettuare una forza F per accelerarlo da fermo a velocità v.

$$L =: E_{kin} = \int_0^{s_v} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{t_v} m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^{t_v} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^{t_v} \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{1}{2} mv^2 \tag{2.4}$$

Se il corpo non parte da fermo ma da velocità v_i mutatis mutandis si ottiene

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) \tag{2.5}$$

2.2 Forze conservative e dissipative

La condizione espressa nella sezione precedente viene spesso espressa anche dicendo che *tale forza è conservativa se il lavoro compiuto in un qualsiasi percorso chiuso è nullo*. Il che è un'immediata conseguenza della 2.3. Tutto ciò, sotto determinate ipotesi matematiche, implica direttamente che debba esistere una funzione potenziale[2] tale che $\mathbf{F} = -\nabla V = -(\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz})$. Tutte le forze che non sono conservative sono dissipative, il lavoro *dipende* dal percorso effettuato. Tale è l'energia dissipata per via delle forze d'attrito che può dipendere dalla lunghezza del percorso, e anche dalla velocità con cui questo viene compiuto nel caso di attrito viscoso. Chiaramente lavorare con forze conservative è molto più facile perché forniscono le *leggi di conservazione* (di energia, momento, momento angolare etc.), che sono di grande utilità

[2] il segno meno è una convenzione; dice esplicitamente che una forza *attinge* dalla variazione di energia potenziale.

nella risoluzione dei problemi. Si vede che il vantaggio di tutto questo è che vi sono delle quantità che cambiano forma, che vengono "travasate" da un contenitore all'altro ma in maniera perfettamente reversibile.

Nel momento in cui sul sistema agiscono forze non conservative l'energia meccanica totale $E_{mecc} = E_{kin} + V$ non si conserva e vale

$$\Delta E_{mecc} = L_{n.c.} \tag{2.6}$$

dove L è il lavoro delle forze non conservative lungo il percorso (se la forza è d'attrito sarà negativo perché per definizione la forza d'attrito è opposta allo spostamento).
In ogni caso si trova il cosiddetto *teorema delle forze vive* che si ricava immediatamente dalla 2.3 e dalla 2.6 e uguaglia il lavoro totale delle forze lungo il percorso alla corrispondente variazione di energia cinetica

$$L_{tot}(A \to B) = -(V(x_B) - V(x_A)) + L_{n.c.}(A \to B) = E^f_{kin} - E^i_{kin} = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2) \tag{2.7}$$

. Questo risultato si puo ricavare anche da un ragionamento che ricalca quello fatto per trovare l'espressione dell'energia cinetica.

2.3 Piccole oscillazioni del pendolo

Immaginiamo una massa m sospesa a una corda tesa, o equivalentemente ad un'asta priva di massa, libera di oscillare in un piano sotto l'azione della forza di gravità: un pendolo. Se θ è l'angolo che forma l'asta con la verticale la forza di richiamo perpendicolare all'asta è pari a $mg\sin(\theta)\mathbf{u}_\theta$. Posta quest'espressione nella seconda legge l'equazione è immediatamente risolubile nell'approssimazione lineare in cui $\sin(\theta) \simeq \theta$. In questa *approssimazione* il moto è armonico, la forza di richiamo è elastica e il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni. Chiaro che quest'ultima affermazione è vera nei limiti della tolleranza ammessa dalla nostra approssimazione.

Questa approssimazione per quanto semplicistica possa sembrare ha un carattere estremamente generale, quindi potente, che cercherò brevemente di illustrare. La forza di richiamo del pendolo è chiaramente conservativa ed è data dal potenziale $V(\theta) = -mg\cos(\theta)$. Nei pressi del punto di equilibrio stabile $\theta = 0$ tale potenziale è parabolico a meno di una costante $V(\theta) = -mg(1 - \frac{\theta^2}{2})$, lo stesso potenziale di un moto armonico. In generale, attorno a un punto di equilibrio si può pensare di espandere in serie di Taylor il potenziale e dato che, per definizione di equilibrio, la derivata prima è nulla, il primo contributo eventualmente non nullo della derivata è il secondo che è un termine *quadratico* nella variabile d'espansione. Dunque per oscillazioni sufficientemente piccole attorno a un punto di equilibrio stabile ogni punto materiale compie un moto armonico. Questa approssimazione viene usata per descrivere gli atomi nei cristalli e nelle molecole, dalla descrizione del pendolo fino al moto dei corpi celesti.

2.4 Esercizi

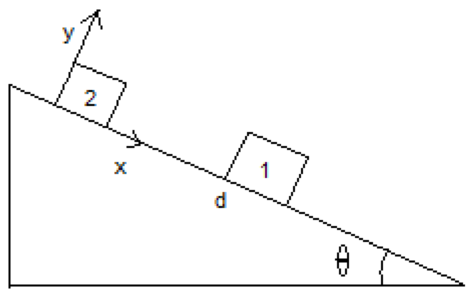

Figura 2.1

Esercizio 4.3

1. Utilizzando il sistema di riferimento in figura 2.1 si scrivono immediatamente le forze che agiscono sui due corpi

$$\begin{cases} mg(\sin(\theta) - \mu_1\cos(\theta)) = ma_1 \\ mg(\sin(\theta) - \mu_2\cos(\theta)) = ma_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

ottenendo le accelerazioni dalle equazioni precedenti sappiamo scrivere le leggi orarie sapendo che $v_1(0) = v_2(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(0) = d$; dunque

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 \\ x_2(t) = d + \frac{1}{2}a_2t^2 \end{cases} \tag{2.9}$$

Ponendo $x_1(t^*) = x_2(t^*)$ si ottiene $t^* = \sqrt{\frac{2d}{a_2-a_1}} \simeq 1.09s$ e dato che $a_2 > a_1$ si ottiene un risultato fisicamente accettabile.

2. la quantità di moto del sistema al momento dell'urto è pari alla quantità di moto dei due corpi, per la conservazione della quantità di moto possiamo scrivere

$$p_1 + p_2 = ma_1 t^* + ma_2 t^* = 2mv \tag{2.10}$$

da cui $v = 2.57ms^{-1}$.

3. Per calcolare l'accelerazione si sommano le forze che agiscono sulle singole masse, questo perché la forza agente su un sistema è la risultante delle forze agenti sulle sue parti. Per cui

$$mg(\sin(\theta) - \mu_1 \cos(\theta)) + mg(\sin(\theta) - \mu_2 \cos(\theta)) = 2ma \tag{2.11}$$

che fornisce $a = 2.35ms^{-2}$

4. Per rispondere alla domanda precedente abbiamo scritto la seconda legge per il sistema composto dai due cubetti. Una volta calcolata l'accelerazione del sistema (quindi l'accelerazione di ogni sua parte essendo un corpo rigido) scriviamo la seconda legge per il corpo a valle. A differenza della 2.8 dovremmo adesso includere la forza di reazione F

$$mg(\sin(\theta) - \mu_1 \cos(\theta)) + F = ma \tag{2.12}$$

da cui $F = 1.7N$

Esercizio 2.3 L'accelerazione complessiva risulta $a = \frac{F}{M+m} = 16ms^{-2}$. La forza "sentita" dal pesetto sarà quella data dall'elongazione della molla dunque $ma = kx \Rightarrow x = \frac{ma}{k} = 32mm$

Esercizio 2.6 Nella configurazione proposta la tensione k del filo è uguale al peso del corpo $k = mg$. Quello che succede quando il filo viene tagliato è che viene permesso all'energia potenziale del corpo di essere trasferita alla molla. La molla sarà massimamente compressa quando $mg\Delta z = \frac{1}{2}k\Delta z^2$ ovvero quando l'energia potenziale corrispondente a quello spostamento verticale sarà esattamente uguale all'energia immagazzinata nella molla compressa di quella quantità (**NB:**questo è diverso da imporre il semplice equilibrio *statico*, dentro quest'espressione è sottinteso un trasferimento dinamico di energie, di forze che compiono lavoro dinamicamente). Ottengo
1) $\Delta z = 2mg/k = 0.14m$ Il massimo della velocità corrisponderà al massimo dell'energia cinetica che si scrive invertendo l'equazione di bilancio energetico

$\frac{1}{2}k(z_a - z)^2 + E_k = mg(z_a - z)$. Dalla condizione di stazionarietà $\frac{dE_k}{dz} = 0$ ottengo:
2)$0 = -mg + k(z_a - z) \Rightarrow z_a - z = mg/k = \Delta z/2 = 0.07m$
E, conseguentemente:
2) $E_{k,max} = \frac{1}{2}m^2g^2/k \Rightarrow v_{max} = g\sqrt{m/k} \simeq 0.83m/s$

Esercizio 2.19 Dato che il problema ci dice che la massa sospesa scende capiamo che la corda è in tensione. Scriviamo le forze agenti sui due corpi, o meglio la loro (unica) componente scalare lungo la direzione del moto:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - mg(\mu\cos(\pi/6) + \sin(\pi/6)) = ma \end{cases} \tag{2.13}$$

Eliminando T dalle due equazioni ottengo

$$a = g(1 - \sin(\pi/6) - \mu\cos(\pi/6))/2 \simeq 0.077g \tag{2.14}$$

Nel momento in cui il corpo sospeso tocca terra tutta la sua energia potenziale è cinetica, dunque dal lavoro della forza totale $F_{tot} = ma = T - mg$ ottengo $v_f = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0.077g} \simeq 1.22ms^{-1}$. Una volta che il corpo sospeso tocca terra $T = 0$ quindi calcolo su quale percorso Δx il lavoro delle forze di gravità e d'attrito è tale da equiparare l'energia cinetica, cioè, semplificata la massa

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}v_f^2}{g(\cos(\pi/6) + \mu\sin(\pi/6))} \simeq 0.09m \tag{2.15}$$

Il risultato finale è $s = d + \Delta x = 1.09m$.

2.5 Formule utili

- **Forze, Lavoro ed Energia**

Legge di Newton	$\vec{F} = m\vec{a}$
Momento di una forza	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Forza elastica	$F_{el} = -k(x - x_0)$
Gravità	$\vec{F}_G = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$
Limite di attrito statico	$\lvert\vec{F}_S\rvert \leq \mu_S \lvert\vec{N}\rvert$
Forza d'attrito dinamico	$\vec{F}_D = -\mu_D \lvert\vec{N}\rvert \hat{v}$
Forza d'attrito viscoso	$\vec{F}_V = -\gamma\vec{v}$
Lavoro	$L = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M d\theta$
Impulso	$J = \int_{\Delta t} F dt$
Energia potenziale gravitazionale	$V = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \rightarrow m_1 g h$
Energia potenziale elastica	$V = \frac{1}{2}k\Delta x^2$
Energia cinetica	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$
Energia meccanica	$E_{mecc} = E_{kin} + V$
Teorema delle forze vive	$E_{kin,f} - E_{kin,i} = L_{tot}$
Conservazione dell'energia	$\Delta E_{mecc} = L_{non\ cons}$

- **Moto armonico e urti**

Legge oraria del moto armonico	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$
	$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0)$
	$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x(t)$
Ampiezza	$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$
Fase inizale	$\phi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$
frequenza della molla	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
frequenza del pendolo	$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$