Lezione 1

Generalità su spazi vettoriali, esempi, concetto di linearità, dimensione

Definizione 1.1 (*Spazio Vettoriale*)**.** *Sia dato un insieme V e un campo $\mathbb{K}$ (considereremo sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ salvo diverso avviso), la terna $(V, \mathbb{K}, +)$ si dice spazio vettoriale se $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\forall k, h \in \mathbb{K}$, $k\mathbf{w} + h\mathbf{v} \in V$ (Proprietà di linearità) e se l'operazione di prodotto per scalare è distributiva sia rispetto alla somma in V che alla somma di $\mathbb{K}$*[1]

Questa è la definizione cardine dell'intero corso, ma cerchiamo di comprenderla meglio.

In matematica le definizioni sono spesso e volentieri astratte in quanto si vuole più generalità possibile, generalità che permette di applicare i risultati che la teoria riesce a sviluppare con uno spettro il più ampio possibile; nonostante ciò esse e i loro nomi si rifanno a certi esempi prototipo.

Quando si pensa ad uno spazio vettoriale la prima cosa che viene in mente è il classico insieme dei vettori in $\mathbb{R}^3$ (o più generalmente in $\mathbb{R}^n$ con n $\in \mathbb{N}$).

Il concetto cardine che caratterizza gli spazi vettoriali è la proprietà di linearità, e ogni volta che si voglia controllare se effettivamente un insieme qualsiasi ha la struttura di spazio vettoriale tocca sempre controllare che combinazioni lineari degli elementi di un insieme appartengano ancora all'insieme. Facciamo i seguenti esempi:

Esempio 1.2. Lo spazio dei vettori di norma unitaria (ovvero con lunghezza uguale a 1) i cui punti individuati sul piano formano una circonferenza e i punti individuati sullo spazio formano una sfera (attenzione! Presso il linguaggio dei matematici per sfera si indica la superficie sferica!). Esso **non** è uno spazio vettoriale in quanto è facile vedere che combinazioni lineari di vettori dell'insieme "escono" dall'insieme stesso (Figura 1.1).

Esempio 1.3. Lo spazio dei polinomi di grado n, infatti sommando polinomi e/o moltiplicarli per *scalari* (ovvero per numeri o se i matematici preferiscono per elementi del campo $\mathbb{K}$) non si "esce" dall'insieme dei polinomi. Questo è un esempio

[1] A rigore bisognerebbe addirittura distinguere le due operazioni di somma $+_V$ e $+_{\mathbb{K}}$. Fatta questa precisazione non staremo a ricordarlo dato che sarà chiaro dal contesto

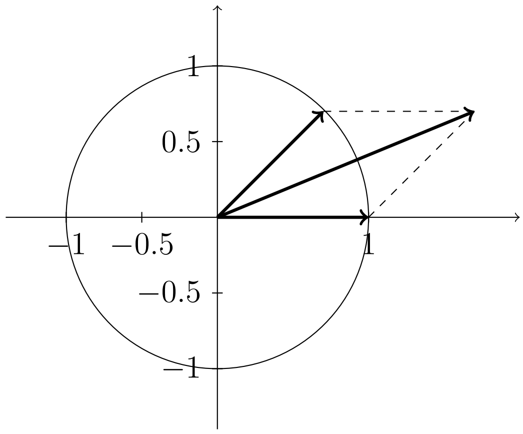

Figura 1.1: *I vettori di norma unitaria non formano uno spazio vettoriale, infatti una loro combinazione lineare esce dal sottoinsieme.*

di spazio vettoriale che non si riferisce a "vettori-freccia" nell'accezione liceale del termine. Infatti sebbene l'esempio dei "vettori-freccia" sia l'esempio primo di spazio vettoriale (tanto intuitivo quanto in ultima analisi generale) ciò non deve far pensare assolutamente che sia l'unico. Gli esempi di spazi vettoriali sono innumerevoli; sono esempi di spazi vettoriali gli spazi delle funzioni di classe C^i $\forall\ i \in \mathbb{N}_0$ e delle funzioni a scala, gli spazi di funzioni L^p (funzioni a potenza p-esima sommabile), gli stessi spazi di matrici $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ che incroceremo più avanti.

Ciò che caratterizza gli spazi vettoriali è il concetto di linearità e questo deve essere molto chiaro.

Definizione 1.4. *Sia V uno spazio vettoriale, un insieme $W \subseteq V$ si dice sottospazio (vettoriale) di V se W è uno spazio vettoriale.*

In particolare si dovrà controllare sempre che con combinazioni lineari di elementi del sottoinsieme non si esca dal sottoinsieme stesso (nell'esempio 1.2 ci riferiamo a un sottoinsieme dello spazio dei vettori ma di certo non è un sottospazio).

Definizione 1.5. *I vettori di un insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ si dicono linearmente indipendenti se l'equazione $a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = 0$ ha come unica soluzione quella banale $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.*

Definizione 1.6. *I vettori di un insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ si dicono linearmente dipendenti se non sono linearmente indipendenti. L'equazione della definizione 1.5 avrà quindi almeno una soluione non banale.*

Definizione 1.7. *I vettori di un insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} \subseteq V$ si dicono generatori dello spazio vettoriale V se $\forall\ \mathbf{v} \in V,\ \exists\{a_i\}\ : \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$.*

Esercizio 1.8. Come verificare la relazione di dipendenza lineare di un insieme di vettori. Trovare un insieme di generatori di uno spazio vettoriale. Decidere se un insieme di vettori è un insieme di generatori

Definizione 1.9. *Un insieme di vettori linearmente indipendenti e generatori di uno spazio vettoriale V si dicono base di V.*

Si dimostra che basi diverse di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, e quindi ha senso la definizione seguente (soprattutto per i matematici: controllare sempre che le definizioni abbiano senso!):

Definizione 1.10. *Dato uno spazio vettoriale V si dice dimensione di V il numero di elementi di una base di V.*

In particolare ciò è concorde col senso usuale del termine se ci riferiamo allo spazio dei vettori, ma ancora una volta avere un'immagine della cosa aiuta ma bisogna sempre ricordarsi che ciò che conta sono ciò che definizioni e teoremi dicono (sempre per il discorso generalità).

Esercizio 1.11. Calcolare la dimensione dello spazio dei polinomi in funzione del grado.

Esercizio 1.12. Dare la dimensione dello spazio delle matrici $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e trovarne una base.