1 Cinematica del punto

1.1 Moto rettilineo

Il problema che ci si pone è quello di quantificare, di misurare, il moto di un oggetto nello spazio che ci circonda. Ciò è fatto misurandone lo spostamento relativamente a un sistema di riferimento in funzione del tempo.
La nostra attenzione deve inizialmente focalizzarsi su semplici astrazioni della realtà che siano tuttavia suscettibili a generalizzazione. Prendiamo quindi in considerazione un punto materiale, un ente puramente geometrico caratterizzato soltanto dalle sue coordinate (e anche dalla sua massa, un parametro rilevante solo quando parleremo della dinamica), che sono appunto le quantità che verranno misurate per analizzarne il moto.
Il tipo di moto più simmetrico e semplice che si può inizialmente immaginare è il moto rettilineo, cioè quello in cui la *traiettoria*, cioè l'insieme di tutti i punti spaziali occupati dal punto materiale nel tempo, costituisce una retta. Questo tipo di moto è unidimensionale e può essere quindi caratterizzato da una sola coordinata $x(t)$. Quest'ultima quando espressa in funzione del tempo è detta *legge oraria* e da l'informazione completa del moto. Il grafico cartesiano di questa funzione è detto *diagramma orario*.

Localmente, se questa funzione è sufficientemente regolare si può pensare di approssimarne l'andamento con una retta la cui pendenza è data da un rapporto incrementale. Nel limite in cui considero intervalli di tempo sempre più piccoli, *se esiste il limite*, posso definire una *velocità istantanea* che matematicamente corrisponde quindi alla derivata della legge oraria rispetto al tempo:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \tag{1.1}$$

Riportando a sua volta l'andamento della velocità rispetto al tempo posso pensare di iterare il procedimento ottenendo l'*accelerazione*[1] $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta c(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}$. Il processo inverso, cioè ricavare la velocità dall'accelerazione e lo spazio percorso dalla velocità una volta forniti i dati iniziali, consiste nell'integrazione cioè la somma di tutti i contributi infinitesimi $d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt$, $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ che per il teorema fondamentale del calcolo diventa

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0) = \int_0^t \mathbf{a}(t')dt' \quad ; \quad \mathbf{s}(t) - \mathbf{s}(0) = \int_0^t \mathbf{v}(t')dt' \tag{1.2}$$

Se si ha la $\mathbf{a}(t)$ si vede dalle relazioni sopra scritte che per ricavare $\mathbf{s}(t)$ bisogna integrare due volte. La prima volta si ottiene $\mathbf{v}(t)$ che richiede la costante di integrazione $\mathbf{v}(0)$, la seconda volta si ottiene $\mathbf{s}(t)$ che richiede la costante $\mathbf{s}(0)$. Le costanti di integrazioni sono i dati iniziali (*condizioni al contorno*) specifiche del problema, il loro numero è correlato al numero di integrazioni necessarie a risolvere il problema.

Esercizio 1.1

- **Opzione a=cost.)** Ipotizziamo che l'accelerazione sia costante e scalare visto che il moto è unidimensionale. La $v(t)$ sarà quindi descritta da una retta tale che $v(0) = v_0$ e $v(t_1) = 0$ dove t_1 è tale che $s(t_1) = d$. La pendenza di questa retta sarà quindi $a = -\frac{v_0}{t_1}$. Esplicitando: $v(t) = v_0 + at$.

$$s(t) = \int_0^t v(t')dt' = v_0 t - \frac{v_0}{2t_1}t^2 \tag{1.3}$$

  . Ponendo $v(t_2) = \frac{v_0}{2}$ si ottiene $t_2 = t_1/2$ e sostituendo $s(t_2) = s(\frac{t_1}{2}) = \frac{3}{4}d \neq \frac{d}{2}$. Il fatto che questa condizione non possa essere mai soddisfatta si può comprendere geometricamente pensando allo spazio percorso in un intervallo $\Delta t = t_a - t_b$ come $\int_{t_a}^{t_b} v(t')dt'$. Si capisce immaginando l'area sottesa alla retta $v(t)$ che $\int_0^{t_2=t_1/2} v(t')dt' > \int_{t_1/2}^{t_1} v(t')dt$. Questo è un approccio più analitico, la soluzione che trovate sul Mazzoldi sfrutta il fatto che la forza che agisce è costante nel tempo e usa il teorema delle forze vive che è un approccio più fisico. Ovviamente i due approcci sono perfettamente equivalenti. La formula 1.3 è *sempre* valida ed è quella che deve essere usata quando si hanno accelerazioni (o forze) tempo-dipendenti.

[1] esistono poi altre quantità che hanno un nome che nessuno (per ovvie ragioni) utilizza, cioè lo *strappo* ($\mathbf{j} = \frac{da(t)}{dt}$) e poi lo *sbalzo* ($\mathbf{s} = \frac{dj(t)}{dt}$).

- **Opzione a=-kv)** $v(t)-v(0)=\int_0^t a(s)ds=\int_0^t -kv(s)ds=\int_0^t -kds=-ks(t)$ dove ho utilizzato la relazione formale $vdt=ds$. Ora, utilizzando la notazione del punto precedente, $v(t_1)=v_0-kd=0\Rightarrow k=-v_0/d$ e $v(t_2)=v_0-k\frac{d}{2}=\frac{v_0}{2}$: ciò significa che questa opzione è quella corretta.
  A questo punto nelle soluzioni del Mazzoldi c'è un errore, dice che tutto ciò "è vero se $v_0\neq 1$ m/s" vi sono almeno due buoni motivi strettamente correlati per cui questa affermazione dovrebbe far dubitare: quali?

1.2 Moto bidimensionale e decomposizione cartesiana

Cosa succede se passiamo alle due dimensioni? Quello che vogliamo descrivere è un moto piano caratterizzato quindi da due coordinate tempo-dipendenti che possiamo scrivere compattamente in un vettore $\mathbf{s}(t)=(x(t),y(t))$.
Il concetto di traiettoria e di legge oraria si estendono naturalmente dalla precedente sezione e, con qualche complicazione aggiuntiva di carattere squisitamente matematico (dovuta al fatto che adesso stiamo lavorando con vettori e non più con scalari) si estende il concetto di velocità e di accelerazione il cui significato fisico è invariato; anzi se la traiettoria è *liscia*, cioè non presenta punti irregolari si trova che $\mathbf{v}(t)=\frac{ds}{dt}=(v_x(t),v_y(t))$ è sempre ben definita, così similmente per l'accelerazione si può derivare ogni componente indipendentemente.
Se mi trovo nella situazione in cui una componente dell'accelerazione risulta dipendere *solo dalla stessa componente spaziale* cioè

$$a_x(x,y)=a_x(x)\quad a_y(x,y)=a_y(y) \tag{1.4}$$

allora i moti relativi alle due direzioni risultano completamente indipendenti e ho che il moto bidimensionale è la mera unione di due moti monodimensionali.
Questo è ovvio matematicamente ma non è ovvio empiricamente (come non lo era ai tempi di Galileo): nulla se non l'intuizione confermata dall'esperimento mi garantisce che un corpo che precipita spinto dalla gravità si muova indisturbato nella direzione orizzontale. Quest'ultimo è ovviamente il caso più semplice, ma nella sua semplicità è molto utile per descrivere un gran numero di moti fisici.
Nel caso più generale le cose si complicano molto ma posso a volte trovare

relazioni fra le componenti che semplificano il lavoro, ad esempio nel primo esercizio qui svolto ho un vincolo che mi da la dipendenza della y dalla x nel secondo ho un moto a velocità costante lungo $\hat{y}$ e un moto lungo $\hat{x}$ che dipende solo dalla posizione y e sfrutterò questa dipendenza per trovare la legge oraria.

Per la trattazione del moto parabolico, cioè il moto di un proiettile sottoposto ad accelerazione costante $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_y$ e del moto circolare si rimanda alla trattazione del libro di testo (Mazzoldi, Nigro, Voci).

Esercizio 1.17 Per illustrare la potenza di quanto detto vi propongo questo semplice esercizio in cui un punto si muove di traiettoria parabolica (possiamo immaginarlo vincolato) e dobbiamo determinare *le componenti* della sua accelerazione punto per punto conoscendo solo l'equazione che descrive la traiettoria ($y = 5x^2$) e *il modulo* della sua velocità $v_0 = 1\ /ms^{-1}$. La legge oraria di questo punto sarà

$$s(t) = (x(t), y(t)) = (x(t), 5x^2(t)) \tag{1.5}$$

Per calcolare la velocità differenzio le singole componenti[2] (la traiettoria è una parabola, curva liscissima)

$$v(t) = \dot{x}(t)(1, 10x(t)) \tag{1.6}$$

Imponendo le condizioni del problema si ottiene

$$|v(t)| = v_0 = 1 = \dot{x}(t)\sqrt{1 + 100x^2(t)} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 100x^2}} \tag{1.7}$$

Che inserita nell'equazione 1.6 e ulteriormente derivata restituisce le componenti dell'accelerazione.

$$a_x = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = -\frac{100x}{(100x^2 + 1)^2} \tag{1.8}$$

$$a_y = \frac{d(10x\dot{x})}{dt} = 10\dot{x}^2 + 10x\ddot{x} = \frac{10}{(100x^2 + 1)^2} \tag{1.9}$$

Si noti come in questo caso in cui la velocità è costante in modulo l'accelerazione sia maggiore in $x = 0$ dove è minore il *raggio di curvatura* della parabola, cioè il raggio del cerchio che meglio approssima localmente la

[2] è consuetudine in meccanica indicare col puntino la derivata temporale, tanti puntini quanto l'ordine della derivata quindi $a_x \equiv \ddot{x}$

nostra curva. Questo perché il moto appare localmente circolare con un'accelerazione pari a $\frac{v^2}{R}$ essendo R il raggio di curvatura della traiettoria. Si vede subito che se v è costante in modulo deriva la suddetta proporzionalità inversa fra raggio di curvatura ed accelerazione normale o centripeta. Se scomponiamo l'accelerazione in componente perpendicolare e tangenziale alla traiettoria sappiamo che quella tangenziale è nulla in quanto il modulo della velocità è costante. Quello che varia è la direzione del moto quindi la componente dell'accelerazione che gioca in questo caso è la componente normale.

Esercizio 1.18 Questo è il classico esercizio dell'attraversamento del fiume. Dato che il testo ci dice che *la velocità relativa all'acqua è* $3.6km/h$ capiamo che sta parlando della sola componente v_y. Il tempo impiegato ad attraversare il fiume non può dipendere dalla velocità trasversale v_x, dunque
1) $T = \frac{20m}{1m/s} = 20s$.
$y(t) = 1t = t \Rightarrow v_x(y(t)) = v_x(t) = 5 \cdot 10^{-3} t(l - t)$ dunque

2) $B = \int_{t=0}^{20} v_x(t)dt = 5 \cdot 10^{-3} [t^2(\frac{l}{2} - \frac{t}{3})]_0^{20} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 20^2(20/2 - 20/3) \simeq 6.7m$.

1.3 Formule utili

- **moto rettilineo uniformemente accelerato**[3]

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$v(t) = v_0 + at$$

- **caduta libera**

$$V(h) = mgh, \quad v_f = \sqrt{2gh}, \quad \Delta t = \sqrt{2h/g}$$

- **moto circolare**

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

se uniforme:

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$
$$v = \omega r, \quad a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \qquad \theta = \theta_0 + \omega t$$

se uniformemente accelerato:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

- **moto del proiettile**

$$y = x \cdot \tan(\theta) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$
$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$
$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

- **moto curvilineo**

$$\vec{a} = a_T \hat{\theta} + a_R \hat{r} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{\theta} - \frac{v^2}{r} \hat{r}$$

[3] per il moto rettilineo uniforme basta porre a=0